Varianta 051

SUBIECTUL I

a) $a = 0, b = 1$. b) $6\sqrt[4]{3}$. c) $z = 3i$.

d) Relația devine: $i^n(1+i) = 1 - i \Rightarrow i^n = -i \Rightarrow n = 3$. (de exemplu !)

e) $x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{3}$. f) $x \in \{0, \pi\}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $C_{x+1}^{y+1} = \frac{(x+1)!}{(y+1)!(x+1-y-1)!} = \frac{x!(x+1)}{y!(y+1)(x-y)!} = \frac{x+1}{y+1} \cdot C_x^y$.

b) $\frac{4}{9}$. c) $g(11) = 1$, pentru că $f(1) = 11$.

d) $2^{2x} = 2^{3x} \Rightarrow x = 0$

e) Folosind relațiile lui Viete, obținem $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -1$.

2.

a) $f'(x) = 8x^7$. b) $\frac{10}{9}$. c) $f''(x) = 56x^6 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția este convexă.

d) 8. e) $e - \cos 1$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 1$.

b) $I_2 \cdot A = A \cdot I_2 \Rightarrow I_2 \in G$. Deoarece $A^2 = A \cdot A$, avem că $A \in G$.

c) $A^2 = O_2$. d) $X \cdot A^2 = O_2 = A^2 \cdot X$, $\forall X \in M_2(\mathbf{C})$.

e) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ şi $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f) Pe de o parte avem $(a \cdot I_2 + b \cdot A) \cdot A = aA + bA^2 = aA$. Pe de altă parte $A \cdot (a \cdot I_2 + b \cdot A) = aA + bA^2 = aA$. Atunci $aI_2 + bA \in G$.

g) $X \in G \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$. Din

$$X = x \cdot I_2 + y \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ x - y = c \\ b = y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a-c}{2}, y = b$$

SUBIECTUL IV

a) $f_1'(x)=\left[e^x\left(x^2+2x\right)\right]'=e^x\left(x^2+4x+2\right)$.

b) $f_{n+1}(x)=e^x\left(x^2+2(n+1)x+n(n+1)\right)$ și

$f_n'(x)=e^x\left(x^2+2nx+n(n-1)\right)+e^x(2x+2n)=e^x\left(x^2+2(n+1)x+n(n+1)\right)$.

c) $f_n(0)=n(n-1)$.

d) Pentru $n=2$ avem egalitatea $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$. Presupunem că

$1\cdot 2+2\cdot 3+...+(k-1)\cdot k=\frac{(k-1)\cdot k\cdot(k+1)}{3}$, și demonstrăm că

$P(k+1):1\cdot 2+2\cdot 3+...+(k+1)\cdot k=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}{3}$.

e) $\frac{1}{3}$. f) $\int_0^1 f_0(x)dx=\int_0^1 e^x\cdot x^2dx=e-2$.

g) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\cdot\left(x^2+2(n+1)x+(n+1)n\right)}{e^x\cdot\left(x^2+2nx+n(n-1)\right)}=1$.